ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Séance 14 : Radiation en champ lointain

la dernière fois

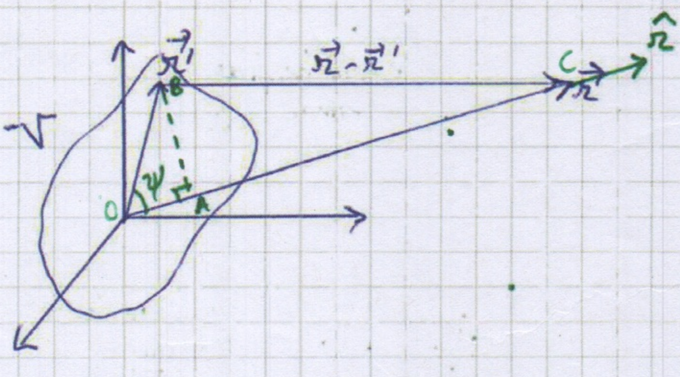
C65

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \iiint \vec{J}(\vec{r}\,') \underbrace{\frac{e^{-j\beta_0 |\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4\pi |\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{g(\vec{r},\vec{r}\,')} d^3\vec{r}\,'$$

$\Rightarrow$ champs exacts
$$\begin{cases} \phi = \dfrac{j}{\omega\mu_0\varepsilon_0} \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - j\omega\vec{A} \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases}$$

e) Champs lointains

C66



= champs pour $\|\vec{r}\| \gg \|\vec{r}\,'\| \quad \forall \vec{r}\,' \in \mathcal{V}$

$\Rightarrow$ on simplifie $\quad g(\vec{r},\vec{r}\,') = \dfrac{e^{-j\beta_0 |\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4\pi |\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

→ Approx. de chp lointain

C67

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = AC\sqrt{1+\frac{AB^2}{AC^2}}$$

$$\overset{d.l.}{\simeq} AC + \underbrace{\frac{AB^2}{2AC}}_{\ll} \simeq AC = OC - OA = r - r'\cos\psi = r - \vec{r}'\cdot\hat{r}$$

→ phase = on garde (interférences)

$$\Rightarrow g(\vec{r},\vec{r}') \simeq \frac{e^{-j\beta_0(r-\vec{r}'\cdot\hat{r})}}{4\pi(r-\underbrace{\vec{r}'\cdot\hat{r}}_{\text{amplitude}})}$$

amplitude → on néglige ordre 1

$$g(\vec{r},\vec{r}') \simeq \frac{e^{-j\beta_0(r-\vec{r}'\cdot\hat{r})}}{4\pi r}$$

Validité

C68

$$\beta_0|\vec{r}-\vec{r}'| \simeq \beta_0\left(AC + \frac{AB^2}{2AC}\right) = \beta_0(r-\vec{r}'\cdot\hat{r}) + \underbrace{\beta_0\frac{AB^2}{2AC}}_{\text{erreur de phase}}$$

max $D/2$

critère : $\beta_0 \frac{AB^2}{2AC} < \frac{\pi}{16} \Rightarrow \beta_0 \frac{(r'\sin\psi)^2}{2r} < \frac{\pi}{16}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \\ D \text{ diamètre de la plus petite sphère contenant } V \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{4D^2}{\lambda} < r}$$

critère de champ lointain

C69

atel. Un téléphone mobile 4G-LTE émet à 1.8 GHz en espace libre. En supposant que le
ts rayonnant sont répartis dans un volume de diamètre maximal de 10 cm, calculer à
 de quelle distance on peut considérer que l'on se trouve dans le champ lointain.
lise le critère. A 24 centimètres on est déjà dans le champ lointain.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

* Calcul des champs lointains $\vec{A}^{ff}$, $\vec{E}^{ff}$, $\vec{H}^{ff}$

$$\vec{A}^{ff}(\vec{r}) = \mu_0 \iiint \vec{J}(\vec{r}\,') \underbrace{\frac{e^{-j\beta_0 r}}{4\pi r}}_{g(r)} e^{j\beta_0 \vec{r}\,'\cdot\hat{r}} \, d^3\vec{r}\,' \quad \text{C70}$$

$$A^{ff}(\vec{r}) = \mu_0 \, g(r) \iiint \vec{J}(\vec{r}\,') \, e^{j\beta_0 \vec{r}\,'\cdot\hat{r}} \, d^3\vec{r} \quad \text{C71}$$

$$\begin{cases} \vec{r}\,' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z} \\ \hat{r} = \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta \quad (\text{sphérique}) \end{cases} \quad \text{C72}$$

$$\Rightarrow \beta_0 \vec{r}\,'\cdot\hat{r} = \underbrace{\beta_0 \sin\theta\cos\phi}_{\beta_x} x' + \underbrace{\beta_0 \sin\theta\sin\phi}_{\beta_y} y' + \underbrace{\beta_0 \cos\theta}_{\beta_z} z' \quad \text{C73}$$

$$② \begin{cases} \beta_x = \beta_0 \sin\theta\cos\phi \\ \beta_y = \beta_0 \sin\theta\sin\phi \\ \beta_z = \beta_0 \cos\theta \end{cases} \quad \text{C74}$$

On note

$$① \left\{ \tilde{J}_{x,y,z}(k_x, k_y, k_z) = \iiint dx'dy'dz' \, J_{x,y,z}(x', y', z') \, e^{j(k_x x' + k_y y' + k_z z')} \right. \quad \text{C75}$$

la FT - 3D des courants.

Alors $\boxed{A^{ff}(\vec{r}) = \mu_0 \, g(r) \, \vec{f}(\theta,\phi)}$ C76 avec $f(\theta,\phi) =$

$$\tilde{J}_x(\beta_x, \beta_y, \beta_z)\hat{x} + \tilde{J}_y(\beta_x, \beta_y, \beta_z)\hat{y} + \tilde{J}_z(\beta_x, \beta_y, \beta_z)\hat{z}$$

le champ lointain est donné par la FT-3D des courants évalué sur la sphère de rayon β_0 !

* Calcul de $\vec{E}^{ff}$ et $\vec{H}^{ff}$ en coordonnées sphériques :

C77

On écrit $\vec{f}(\theta,\phi) = f_\theta \,\hat{\theta} + f_\phi \,\hat{\phi} + f_r \,\hat{r}$ avec

$$③\begin{cases} f_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\tilde{J}_x + \cos\theta\sin\phi\,\tilde{J}_y - \sin\theta\,\tilde{J}_z \\ f_\phi = -\sin\phi\,\tilde{J}_x + \cos\phi\,\tilde{J}_y \end{cases}$$

, f_r (= qqch inutile)

$$\vec{H}^{ff} \overset{C78}{=} \frac{1}{\mu_0}\,\vec{\nabla}\times\vec{A}^{ff} \overset{C79}{=} \vec{\nabla}\times(g\vec{f}) \simeq \frac{dg}{dr}\,(\hat{r}\times\vec{f}) \to f_\theta\,\hat{\phi} - f_\phi\,\hat{\theta}$$

$$\frac{dg}{dr} \approx -j\beta_0\,\frac{e^{-j\beta_0 r}}{4\pi r}$$) écrire directement

$$④\begin{cases}\vec{H}^{ff} = -j\beta_0\,\frac{e^{-j\beta_0 r}}{4\pi r}\left(f_\theta\,\hat{\phi} - f_\phi\,\hat{\theta}\right)\end{cases}$$ C80

$$\vec{E}^{ff} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\,\vec{\nabla}\times\vec{H}^{ff} \Rightarrow$$ C81

$$④\begin{cases}\vec{E}^{ff} = -j\beta_0\,\zeta_0\,\frac{e^{-j\beta_0 r}}{4\pi r}\left(f_\phi\,\hat{\phi} + f_\theta\,\hat{\theta}\right)\end{cases}$$ C82

<u>Recette</u> : Calcul des champs lointains

1. Calculer la TF-3D de $\vec{J}(\vec{r}\,')$ en utilisant ①
2. Remplacer k_x, k_y, k_z par $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ donnés par ②
3. Calculer f_θ, f_ϕ utilisant ③
4. Calculer $\vec{E}^{ff}, \vec{H}^{ff}$ via ④

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

<u>Exemple</u> : Dipole infinitésimal $\vec{J}(\vec{r}\,') = \hat{z}\, I \Delta l\ \delta(\vec{r}\,')$ $[A/m^2]$ ✓

$\hat{z} \to A$, $\Delta l \to m$, $\delta \to 1/m^3$

① $\tilde{J}_{x,y} = 0$ car $J_{x,y} = 0$

$$\tilde{J}_z = \iiint_V J_z(x', y', z')\, e^{j(k_x x' + k_y y' + k_z z')}\, dx'dy'dz'$$

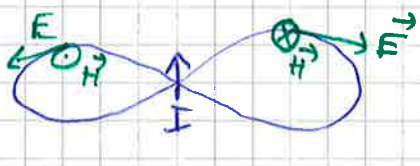
$$= \iiint_V I \Delta l\ \delta(x', y', z')\, e^{j(k_x x' + k_y y' + k_z z')}\, dx'dy'dz'$$

$$= I \Delta l$$

② Rien à faire car $\tilde{J}_{x,y,z} = cst$

③ $\begin{cases} f_\theta = -\sin\theta\, I \Delta l \\ f_\phi = 0 \end{cases}$

④ $\begin{cases} \vec{E}^{ff} = j\beta_0 \eta_0 \dfrac{e^{-j\beta_0 r}}{4\pi r} I \Delta l \sin\theta\, \hat{\theta} \\ \vec{H}^{ff} = j\beta_0 \dfrac{e^{-j\beta_0 r}}{4\pi r} I \Delta l \sin\theta\, \hat{\phi} \end{cases}$



Rq : la dernière fois

$$\vec{H} = \frac{I \Delta l}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \underbrace{\frac{j\beta_0}{r}}_{ff} \right) \sin\theta\, e^{-j\beta_0 r}\, \hat{\phi}$$

OK